

Introducción

Exiliados

Es un día de finales de verano en las afueras de Nueva Jersey. Dos hombres pasean por una calle solitaria con las manos cogidas a la espalda, conversando plácidamente. Por encima de sus cabezas, un espeso dosel arbóreo los protege del cielo. A una buena distancia de la calle se alzan vetustas mansiones, mientras que al otro lado, justo pasados los olmos, se extiende la exuberante alfombra de un campo de golf, de donde les llegan, como de muy lejos, las voces apagadas de los golfistas.

Sin embargo, por más que las apariencias puedan indicar lo contrario, no se trata de la típica zona residencial habitada exclusivamente por gentes de postín, que se desplazan diariamente a sus puestos de trabajo en la ciudad para poder sufragar tan opulento nivel de vida. No, esto es Princeton, en el estado de Nueva Jersey, sede de una de las mejores universidades del mundo y, como tal, poblada por un contingente humano mucho más ecléctico de lo que pueda parecer a simple vista. En la época en que estos dos hombres pasean de regreso a casa por una calle silenciosa, la población de Princeton se ha vuelto aún más cosmopolita, toda vez que alberga a muchas de las mentes más privilegiadas de Europa que vienen huyendo de Hitler. Como dijo cierto profesor estadounidense, «Hitler sacude el árbol y yo recojo las manzanas».

Rueda que te rueda, algunas de las manzanas más selectas han venido a parar a este rinconcito del planeta. Por tanto, no es de extrañar que el idioma en que conversan los dos paseantes sea el alemán. Uno de ellos, vestido con un atildado terno de lino blanco y tocado con un sombrero de fieltro a juego, no ha cumplido aún los cuarenta, mientras que el otro, que luce unos anchos pantalones sujetos con tirantes de estilo europeo, frisa en los setenta. A pesar de la diferencia de edad, parecen conversar de tú a tú, aunque de cuando en cuando el anciano frunce el semblante en un consabido rictus de hilaridad y menea la cabeza como si el otro acabase de soltar algo *wirklich verrückt*, o sea, un solemne disparate.

En uno de los extremos de la alameda, aquel del que se alejan los dos hombres, sobre una vasta extensión de césped, se yergue el flamante edificio de ladrillo rojo y estilo sureño del Instituto de Estudios Avanzados. El Instituto, que había sido constituido algo más de una década antes, está enclavado en el edificio gótico de la facultad de matemáticas de la Universidad de Princeton. Pero la afluencia de cerebros europeos le ha granjeado un mayor prestigio y ahora se encuentra ubicado a unos pocos kilómetros de la universidad, en su propio y espacioso campus, que cuenta con un estanque y un bosquecillo surcado de senderos donde poder toparse con ideas fugitivas.

El Instituto de Estudios Avanzados, integrado por unos pocos pensadores escogidos, ya constituía, a comienzos de la década de 1940, una anomalía para Estados Unidos. Puede que una de las razones de su singularidad residiera en que fue fruto de las ideas visionarias de un solo hombre. En 1930, el reformador de la enseñanza Abraham Flexner convenció a los herederos de unos grandes almacenes de Nueva Jersey, Louis Bamberger y su hermana, la señora de Felix Fuld, de que financiaran un nuevo tipo de institución académica dedicada a «la utilidad del conocimiento inútil». Los dos magnates del comercio minorista, llevados de su vena filantrópica, le habían vendido el negocio a R. H. Macy and Co. tan sólo unas semanas antes del *crac* bursátil, y acudieron a Flexner para que los aconsejase sobre cómo invertir su fortuna de treinta millones de dólares en la mejora de la mente humana.

Hacia ya unos años que Flexner, hijo de emigrantes de la Europa del este, se había propuesto poner en evidencia, sin la ayuda de nadie, la pésima calidad de la educación médica en Estados Unidos. A finales del siglo XIX y comienzos del XX, existía una sobreabundancia de facultades de medicina cuyos títulos, con frecuencia, lo único que indicaban era que el licenciado había pagado las debidas matrículas. Sólo el estado de Missouri contaba con cuarenta y dos de esos centros, y la ciudad de Chicago, con catorce. El informe de Flexner, que denunciaba toda esa farsa y que publicó la Fundación Carnegie para el Avance de la Enseñanza, había cambiado las cosas. De un día para otro, algunas de las peores instituciones académicas recogieron sus tenderetes y se esfumaron sin dejar ni rastro.

Bamberger y Fuld estaban agradecidos a sus antiguos clientes de Nueva Jersey y querían corresponderles de alguna forma. Lo primero que se les ocurrió fue una facultad de medicina, de modo que enviaron a sus representantes a entrevistarse con la persona que tanto sabía sobre cómo debería enseñarse dicha disciplina. (El hermano de Flexner era el director de la facultad de medicina de la Universidad Rockefeller, que el propio Flexner tomó como modelo.) Pero Flexner albergaba sueños aún más utópicos que el de garantizar que los médicos estadounidenses tuviesen alguna noción de lo que era la medicina. Sus ideas sobre la reforma de la enseñanza se habían apartado bruscamente del terreno de las aplicaciones prácticas. Su propósito era crear un santuario para los pensadores más puros, erigir la proverbial torre de marfil con sólidos ladrillos rojos: en pocas palabras, fundar lo que llegaría a conocerse como el Instituto de Estudios Avanzados.

En ese lugar, los miembros del cuerpo docente, escogidos con la máxima reverencia, serían tratados como los príncipes de la *Reine Vernunft*—la razón pura— que realmente eran. Se les concedería una generosa remuneración (tanta que algunos bautizaron la institución como «Instituto de Salarios Avanzados»), así como el inestimable privilegio de disponer de todo el tiempo del mundo para pensar, sin tener que preparar clases ni corregir los exámenes de los alumnos; en realidad, por no tener, no tendrían ni que soportar la presencia

de alumno alguno. En lugar de eso, un flujo constantemente renovado de jóvenes estudiosos de gran talento, a quienes se terminaría conociendo como «miembros temporales», residirían uno o dos años en el centro, con el fin de inyectar el vigorizante tónico de su energía, juventud y entusiasmo en las venas de los genios. «Debería constituir una libre comunidad de estudiosos», dejó escrito Flexner. «Libre, porque a todo individuo maduro que actúe movido por propósitos intelectuales hay que dejarlo que persiga sus objetivos como le plazca». La institución debería brindar un entorno sencillo aunque espacioso, «y, por encima de todo, tranquilidad: ausencia de distracciones, ni por necesidades materiales ni por la responsabilidad paternal para con un alumnado inmaduro». En un principio, Bamberger y Fuld querían situar la escuela en Newark, Nueva Jersey, pero Flexner los convenció de que Princeton, con su secular solera de erudición y sus impermeables estratos de sosiego y aislamiento, era un emplazamiento mucho más propicio para que los genios, libres de toda cortapisa, rindiesen los resultados apetecidos.

Flexner decidió fundamentar su visión en los sólidos cimientos de las matemáticas, «la más severa de las disciplinas», según sus propias palabras. De todos los académicos, los matemáticos son, en cierto sentido, los más alejados de cuanto atañe al «mundo real», expresión que, juzgada en su contexto, significa algo más que simplemente el ámbito práctico de los asuntos cotidianos. La expresión pretende abarcar más o menos todo lo que existe desde un punto de vista físico, en contraposición a las ideas, conceptos y teorías, esto es, al mundo de la mente. Por supuesto, el mundo de la mente bien puede tratar, y de hecho lo normal es que trate, del mundo real; en matemáticas, en cambio, eso no es lo normal. Puede que los matemáticos, dada su extrema lejanía, no gocen (o padezcan) de mucha atención por parte del público en general, pero, entre quienes habitan en el mundo de la mente, se los mira con una especie de fascinación por el rigor de sus métodos y la certeza de sus conclusiones, características exclusivas que tienen que ver precisamente con las mismas razones que hacen de ellas una disciplina en gran medida inútil («inútil» en el sentido de que el saber matemático, en sí y por sí mismo, no tiene consecuencias prácticas, no propicia medio

alguno para la modificación, a mejor ni a peor, de nuestras condiciones materiales).

Al rigor y a la certeza de las matemáticas se llega a priori, lo que significa que el matemático no recurre a ninguna observación a la hora de obtener sus nociones matemáticas,¹ como tampoco estas nociones, en sí mismas y por sí mismas, conllevan observaciones, de manera que ninguna de nuestras experiencias puede sacudir los cimientos sobre los que se asienta nuestro conocimiento de esas verdades matemáticas. Ninguna experiencia podría servir de justificación para revisar, por ejemplo, que $5 + 7 = 12$. Si al sumar 5 y 7 objetos nos diese un total de 13, los contaríamos de nuevo. Si después de contar varias veces nos siguiese dando 13, daríamos por hecho que uno de los 12 objetos se ha partido o que estamos viendo doble o soñando, o incluso que nos hemos vuelto locos. La verdad matemática de que $5 + 7 = 12$ se utiliza para evaluar experiencias contables y no al contrario.

La naturaleza apriorística de las matemáticas es un asunto complicado que se presta a confusión. Es lo que hace de las matemáticas un saber tan concluyente, tan refractario a cualquier enmienda: Una vez demostrado un teorema, queda inmunizado contra toda revisión empírica. Las matemáticas, en general, gozan de cierta invulnerabilidad, precisamente porque son a priori. En la torre abovedada de la *Reine Vernunft*, los matemáticos ocupan el pináculo por cuanto sus métodos consisten en pensar, pensar y nada más que pensar; a esto, en parte, se refería Flexner cuando aludía a las matemáticas como la más severa de las disciplinas.

¹ Lo cual, sin embargo, no implica que esas ideas sean innatas, es decir, que nazcamos con ellas. Obviamente, primero tenemos que adquirir los conceptos y el lenguaje con que expresarlos antes de poder llegar a creer que $5 + 7 = 12$. La idea de lo innato es una noción psicológica, mientras que la de lo a priori es una noción epistemológica que tiene que ver con el modo de justificar la creencia, con lo que cuenta como prueba tanto en su favor como en su contra. [Nota: En el libro se emplearán dos tipos de notas: notas a pie de página para abundar en una idea in situ, y notas finales para identificar las citas].

A pesar de su talla intelectual, los matemáticos son relativamente rentables y su manutención es barata, pues sólo requiere, de nuevo en palabras de Flexner, «unos pocos hombres, unos pocos alumnos, unas pocas aulas, libros, pizarras, tiza, papel y lápices». No hacen falta laboratorios caros, ni costosos observatorios, ni maquinaria pesada. Los matemáticos transportan todas sus herramientas en el cráneo, lo cual es otra manera de decir que las matemáticas son un saber a priori. La mentalidad práctica de Flexner también tenía presente el hecho de que las matemáticas son una de las pocas disciplinas en las cuales existe casi total unanimidad en cuanto a la identidad de los mejores. Del mismo modo que las matemáticas son la única disciplina capaz de establecer sus conclusiones con la irrefutable contundencia del razonamiento a priori, asimismo el escalafón de sus representantes puede establecerse con una exactitud casi matemática. Flexner, en su calidad, no sólo de fundador del Instituto, sino de su primer director, sabría exactamente a quién reclutar.

No tardó en bajar el listón de los requisitos lo bastante como para permitir el ingreso de los más teóricos entre los físicos y los más matemáticos entre los economistas, y a finales de 1932 pudo anunciar triunfalmente que los dos primeros empleados que había contratado eran Oswald Veblen, un matemático de primerísima categoría, de la propia Universidad de Princeton, y nada más y nada menos que Albert Einstein, el científico alemán cuyo estatus de casi ídolo lo habían colocado en el punto de mira de los nazis. Sus revolucionarias teorías general y especial de la relatividad habían sido objeto de ataques por parte de científicos alemanes, que las consideraban representativas de una física «patológicamente judía» y corrompidas por el típico encaprichamiento de los judíos por la matemática abstracta. Antes incluso de ponerse en marcha los proyectos genocidas, el célebre físico ya formaba parte de la lista negra del Tercer Reich.

Como es lógico, un amplio número de universidades se mostraron más que dispuestas a acoger a tan prestigioso refugiado; el Instituto de Tecnología de la ciudad californiana de Pasadena, en concreto, trató por todos los medios de hacerse con sus servicios. Pero Einstein mostraba mayor preferencia por Princeton, según

algunos porque había sido la primera universidad estadounidense en interesarse por su trabajo. Sus amistades, que miraban aquel templo del saber con ojos cosmopolitas, convencidas del carácter intrínsecamente pueblerino de Nueva Jersey, le preguntaban «¿Es que quieres suicidarte?». Pero teniendo en cuenta la súbita hostilidad maníaca de su patria, la antigua y duradera amistad de Princeton debió de resultarle irresistible. Einstein le pidió a Flexner un salario de 3.000 dólares y Flexner le hizo una contraoferta de 16.000. Muy pronto, la famosa cabeza con el pelo cargado de iones empezó a pasearse por las tranquilas aceras residenciales. Al menos en una ocasión un coche se estrelló contra un árbol «después de que el conductor identificase de pronto el rostro del apuesto anciano que caminaba por la calle».

Otras lumbreras del viejo continente siguieron a Einstein hasta Princeton, entre ellas el húngaro John von Neumann, el rutilante sabio multidisciplinar que durante su estancia en el Instituto acometería la fabricación del primer ordenador, escandalizando así a aquellos miembros que comulgaban con Flexner en el compromiso de mantener al Instituto libre de toda labor «útil».² Pero fue Einstein quien quedaría inmortalizado, incluso cuando aún estaba bien vivo,³ como la quintaesencia del pensador genial, al punto de que los lugareños, casi desde el mismo día de su llegada, siempre se han referido a la institución de Flexner como «el instituto de Einstein».

² Como primera incursión del Instituto fuera del ámbito de lo estrictamente teórico, el proyecto sería tachado de «inapropiado y fuera de lugar» por parte incluso de miembros que tenían en mucho lo que era el empeño en sí, según la versión oficial de la facultad de matemáticas del Instituto. A la muerte de Von Neumann, el ordenador se trasladó discretamente a la Universidad de Princeton.

³ Muchos contemporáneos refieren el «silencio reverencial» (en palabras de Helen Dukas, *ibídem*) que se hacía en cuanto el físico entraba en una conferencia o seminario. El filósofo Paul Benacerraf, a la sazón alumno de posgrado en Princeton, me contó que a veces Einstein asistía al seminario semanal de filosofía que tenía lugar todos los viernes, y que si bien rara vez intervenía, dejaba sentir su presencia por el mero hecho de estar presente.

Ni que decir tiene que el más anciano de los dos paseantes entrevistados en la alameda que arranca del Instituto no es otro que el morador más famoso de Princeton, cuyo gesto vuelve a torcerse en una mueca de extrañeza al oír lo que su compañero de caminata acaba de proponer con toda seriedad. El joven, un lógico matemático, responde a la reacción de Einstein con una leve sonrisa socarrona, pero sigue exponiendo las consecuencias que se deducen de su postulado con imperturbable precisión.

Sus conversaciones diarias abarcan temas como la física y las matemáticas, la filosofía y la política, y en todas estas cuestiones, lo más probable es que el lógico se descuelgue con algo que sobresalte a Einstein, bien por original y profundo o por ingenuo o absolutamente descabellado. Todo su pensamiento está regido por un «interesante axioma», como lo definió Ernts Gabor Strauss, asistente de Einstein de 1944 a 1947: «Por cada hecho que existe, existe también una explicación de por qué ese hecho es un hecho, de por qué tiene que ser un hecho. Esta convicción equivale a afirmar que en el mundo no existe la contingencia en estado puro, ni ningún dato fehaciente que pudiera no serlo. En otras palabras, el mundo jamás, ni siquiera una sola vez, nos hablará como un padre desesperado hablaría con su rebelde hijo adolescente. ¿Por qué? Yo te diré por qué: ¡porque lo digo yo!». El mundo siempre tiene una explicación de sí mismo, o como lo expresa el compañero de paseo de Einstein, *Die Welt ist vernünftig*: el mundo es inteligible. Las conclusiones que se derivan de la aplicación rigurosamente sistemática de este «interesante axioma» a todo asunto que se le pase por la mente al joven lógico –desde la relación entre cuerpo y alma hasta la política internacional, pasando por la propia política interna del mismísimo Instituto de Estudios Avanzados– suele divergir radicalmente de lo que dicta el sentido común. A él, sin embargo, semejante divergencia no le importa lo más mínimo. Es como si una de las leyes tácitas de sus procesos mentales estableciese que si el razonamiento y el sentido común divergen... ¡peor para el sentido común! A fin de cuentas, ¿qué es el sentido común sino algo de lo más común?

El más joven de los paseantes es mucho menos conocido, tanto entonces como ahora. Con todo, su obra, a su modo, fue tan revo-

lucionaria como la de Einstein y ha de figurar en el pequeño grupo de los descubrimientos más radicales y rigurosos del siglo pasado, aquellos cuyas consecuencias se extienden mucho más allá de sus respectivos ámbitos y terminan incorporándose a nuestras concepciones más fundamentales. Al menos en el campo de la ciencia matemática, el primer tercio del siglo xx produjo una revolución



El lógico y el físico en uno de sus paseos diarios para ir y volver del Instituto de Estudios Avanzados, Princeton.

conceptual tras otra. El teorema de este hombre es la tercera pata –las otras dos son el principio de incertidumbre de Heisenberg y la teoría de la relatividad de Einstein– de ese trípode de cataclismos teóricos que sacudieron los cimientos de las «ciencias exactas» hasta en lo más hondo. Esos tres descubrimientos parecen habernos transportado a un paraje desconocido, a un mundo tan disorde con nuestras anteriores suposiciones e intuiciones que, casi un siglo después, todavía estamos tratando de averiguar dónde hemos aterrizado exactamente.

El carácter distante tanto del hombre como de su obra tendrán mucho que ver en que nunca vaya siquiera a rozar el estatus de celebridad de su compañero de caminatas en Princeton ni el del autor del principio de incertidumbre, que en ese mismo momento histórico estaría, casi con toda seguridad, ocupado en la fabricación de la bomba atómica para la Alemania nazi. El compañero de paseo de Einstein es un revolucionario enmascarado. Es el matemático más famoso del que seguramente no hayan oído hablar jamás. O, en el caso de que hayan oído hablar de él, es muy probable que, sin que sea culpa de ustedes, lo asocien con un tipo de ideas –subversivamente hostiles a los propósitos de la racionalidad, la objetividad y la verdad– que él no sólo rechazaba de plano sino que creyó haber desacreditado de manera concluyente y matemática.

Se trata de Kurt Gödel, y en 1930, cuando contaba con sólo 23 años, ya era el autor de una extraordinaria demostración logico-matemática de algo llamado el teorema de incompletitud; en realidad, de dos teoremas de incompletitud lógicamente relacionados entre sí.

A diferencia de la mayoría de los resultados matemáticos, los teoremas de incompletitud no se expresan mediante números ni ningún otro formalismo simbólico. Aunque el meollo de la demostración es de un tecnicismo apabullante, la estrategia global de la misma, una auténtica maravilla, no lo es. Las dos conclusiones que surgen al cabo de toda la pirotecnia formal pueden expresarse en un lenguaje más o menos corriente. El artículo «Teorema de Gödel» de la *Encyclopedia of Philosophy* se abre con una escueta exposición de ambos teoremas:

Se entiende por teorema de Gödel generalmente lo siguiente:

En cualquier sistema formal adecuado para la teoría de números existe una fórmula indecidible, esto es: una fórmula que no puede demostrarse y cuya negación tampoco. (Este enunciado se denomina en ocasiones primer teorema de Gödel).

Un corolario al teorema es que la coherencia de un sistema formal adecuado a la teoría de números no puede demostrarse dentro del sistema. (A veces es este corolario lo que se conoce como teorema de Gödel; otras, también se le llama segundo teorema de Gödel.)

Estos enunciados son generalizaciones un tanto imprecisas de los resultados que Kurt Gödel publicó en Viena en 1931 («Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I», dados a imprenta el 17 de noviembre de 1930).

Aunque tal vez cueste adivinarlo a partir de un enunciado tan lacónico, lo cierto es que los teoremas de la incompletitud son extraordinarios precisamente (entre otras razones) por lo mucho que expresan. Pertenecen a la rama de las matemáticas conocida como lógica formal o lógica matemática, un área disciplinar que antes del logro de Gödel era vista con recelo⁴ entre los matemáticos; sin embargo, se extienden mucho más allá de su estrecho ámbito formal y abordan cuestiones tan vastas y espinosas como la naturaleza de la verdad, el conocimiento y la certidumbre. Habida cuenta de que el debate sobre estas cuestiones atañe íntimamente a la naturaleza humana –al fin y al cabo, cuando hablamos del conocimiento estamos hablando de forma implícita de quienes conocen– siempre se ha pensado que los teoremas de Gödel también tenían cosas importantes que decir acerca de lo que nuestras mentes podrían –y no podrían– ser.

⁴ Antes de que Gödel entrase en escena, lo más frecuente era que los lógicos fuesen miembros de un departamento de filosofía. Simon Kochen, lógico del departamento de matemáticas de la universidad de Princeton, me señaló que «Gödel situó la lógica en el mapa de las matemáticas. Hoy en día, todo departamento matemático de renombre cuenta entre su personal con algún representante del campo de la lógica. Puede que no tengan más que uno o dos lógicos, pero al menos alguno habrá» (mayo de 2002).

Algunos pensadores han juzgado que los teoremas de Gödel echaban una excelente leña al fuego posmoderno, arrasando con las viejas formas de pensamiento absolutista acerca de la verdad, la certeza, la objetividad y la racionalidad. Un escritor expresó el sentir posmoderno de manera tan gráfica como escatológica: «Para las *mates*, [Gödel] es el diablo. Después de Gödel, la idea de que las matemáticas no eran sólo el lenguaje de Dios, sino un lenguaje que podíamos descifrar para entender el universo, para entenderlo todo, ya no se sostiene más. Es parte de la gran incertidumbre posmoderna en que vivimos». La inevitable incompletitud incluso de nuestros sistemas formales de pensamiento demuestra que no existe ninguna base inmutable sobre la que cimentar sistema alguno. Todas las verdades –aun aquellas que parecían tan irrefutables que eran inmunes a la mera posibilidad de revisión– son esencialmente una creación artificial. Es más: la misma noción de lo objetivamente verdadero es un mito social. Nuestras mentes no están arraigadas en la verdad; antes al contrario, es la noción de verdad la que está arraigada por completo en nuestras mentes, que sólo son los sirvientes involuntarios de formas organizativas de influencia. La epistemología no es más que la sociología del poder. Ésa es, más o menos, la versión posmoderna de Gödel.

Otros pensadores han sostenido que, con respecto a la naturaleza de la mente humana, las conclusiones de los teoremas de Gödel apuntan en una dirección completamente diferente. Por ejemplo, Roger Penrose, en sus libros *La nueva mente del emperador* y *Las sombras de la mente*, ha recurrido a los teoremas de incompletitud para fundamentar su argumento de que nuestra mente, sea lo que sea, jamás podrá ser reemplazada por un ordenador digital. Lo que demuestran los teoremas de Gödel, sostiene Penrose, es que incluso en nuestro pensamiento más técnico y reglado –o sea, las matemáticas– entablamos procesos de descubrimiento de verdad que no pueden reducirse a los procedimientos mecánicos de los programas informáticos. Fíjense en que el argumento de Penrose, diametralmente opuesto a la interpretación posmoderna expuesta en el párrafo anterior, entiende que las conclusiones de Gödel han dejado en buena parte intacto nuestro conocimiento matemático. Los teore-

mas de Gödel no demuestran los límites de la mente humana, sino los límites de los modelos computacionales de la mente humana (en dos palabras: los modelos que reducen todo pensamiento a la observancia de unas reglas). No nos dejan tirados en la incertidumbre posmoderna sino que más bien invalidan cierta teoría reduccionista de la mente.

Así pues, los teoremas de Gödel parecen ser una criatura única en su especie: verdades matemáticas que también abordan –siquiera de manera ambigua y controvertida– la pregunta clave de las disciplinas humanísticas: ¿en qué consiste nuestra condición humana? Son los teoremas más prolijos de la historia de las matemáticas. Aunque existen discrepancias acerca de exactamente cuánto, y qué, dicen, no cabe duda de que decir, dicen muchísimo, y que lo que dicen trasciende las matemáticas. En realidad, el hecho de que la *Encyclopedia of Philosophy* los haya formulado en un lenguaje (más o menos) llano está estrechamente relacionado con esa naturaleza metamatemática de los teoremas. Los conceptos de «sistema formal», «indecidible» y «coherencia» pueden ser semitécnicos y requerir explicación (razón por la cual el lector no ha de preocuparse si no ha entendido gran cosa del sucinto enunciado de los teoremas); pero son conceptos metamatemáticos cuya explicación (que se ofrecerá llegado el momento) no se expresa en lenguaje matemático. Los teoremas de Gödel son teoremas matemáticos que logran zafarse de lo que es mera matemática. Hablan, a un mismo tiempo, desde dentro y desde fuera de las matemáticas. Ésta es una faceta más de su inconfundible fascinación, faceta que el físico y matemático Douglas Hofstadter capturó en su popular libro *Gödel, Escher, Bach: Un eterno y grácil bucle*, galardonado con el premio Pulitzer.

El prefijo *meta*, de origen griego, significa «después», «más allá», y sugiere, por así decirlo, una visión desde fuera. La «metavisión» de un área cognitiva plantea preguntas del tipo ¿cómo es posible que esta área de conocimiento haga lo que hace? Las matemáticas, precisamente por ser sui generis –la más severa de las disciplinas– y emplear métodos a priori para establecer sus con frecuencia increíbles pero irrevocables resultados, siempre han planteado contundentes «metapreguntas» a los teóricos del conocimiento (los lla-

mados «epistemólogos»), más en concreto la pregunta de cómo es posible que las matemáticas hagan lo que hacen. La certeza de las matemáticas, la divina infalibilidad que parecen conferir a los iniciados en sus arcanos, siempre ha planteado tanto un paradigma que emular –si podemos hacerlo aquí, hagámoslo en todas partes–⁵ como un enigma sobre el que cavilar: ¿cómo podemos hacerlo, ahí o donde sea? ¿Cómo podrían seres como nosotros, que hemos salido despedidos del ciego torbellino de la evolución, alcanzar infalibilidad alguna? Para mejor captar este misterio tal vez sea útil recordar la célebre frase de Groucho Marx de que jamás pertenecería a ningún club que aceptase a un miembro como él. Del mismo modo, hay quienes se han preguntado con inquietud cómo es posible que siendo las matemáticas una ciencia tan cierta, las conozcamos gente como nosotros. ¿Cómo hemos podido ingresar en un club cognitivo tan exclusivo?

Las metapreguntas acerca de un ámbito disciplinar, pongamos por caso la ciencia, las matemáticas o el derecho, no son, por lo general, preguntas contenidas en el ámbito en sí; no son, respectivamente, científicas ni matemáticas ni legales. Pertenecen, más bien, a la categoría de preguntas filosóficas que forman parte, respectivamente, de la filosofía de la ciencia, de las matemáticas o del derecho. Los teoremas de Gödel constituyen una excepción espectacular a esta regla general. Son matemáticos y a la vez metamatemáticos. Poseen todo el rigor de lo demostrado a priori, y, no obstante, establecen una «metaconclusión». Es como si alguien pintase un cuadro que respondiese a las preguntas fundamentales de la estética; un paisaje o retrato que representase el carácter general de la belle-

⁵ Esta epistemología utópica es característica de los racionalistas del siglo XVII: René Descartes (1596-1650), Baruch Spinoza (1632-1677) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Spinoza y Leibniz, en particular, creían que era posible apropiarse de los parámetros y métodos de los matemáticos y generalizarlos a fin de que respondiesen a todas nuestras preguntas: científicas, éticas e incluso teológicas. Así, cuando surgiesen discrepancias teológicas, de aquellas que provocaban largas y cruentas guerras, las personas razonables podrían responder: «venga, deduzcamos a priori».

za y que incluso explicase por qué nos emociona como nos emociona. Es extraordinario que un resultado matemático pueda expresar algo, sea lo que sea, acerca de la naturaleza de la verdad matemática en general.

Los dos teoremas de Gödel abordan precisamente la cuestión que desde siempre ha singularizado a las matemáticas: la certidumbre, la incorregibilidad, el apriorismo. ¿Acaso los teoremas nos expulsan del club más exclusivo de toda la epistemología, invalidando nuestra afirmación de que somos capaces de alcanzar, siquiera en el campo de las matemáticas, la certeza absoluta? ¿O ratifican nuestra condición de miembros de pleno derecho? El propio Gödel, como veremos, mantenía una firme postura a propósito de esta metapregunta, en marcado contraste con las interpretaciones que vulgarmente se asocian con su obra.

En la obra tanto de Gödel como de Einstein, las metapreguntas de cómo han de interpretarse, respectivamente, las matemáticas y la física –es decir, qué es lo que hacen estas dos poderosas formas de conocimiento y cómo lo hacen– desempeñan un papel primordial. Einstein también poseía férreas «metaconvicciones» a propósito de la física. Dicho de un modo más específico, las metaconvicciones de Einstein y Gödel tratan de responder a la pregunta de si sus respectivas disciplinas son descripciones de una realidad objetiva –que existe con independencia de la experiencia que podamos tener de ella– o, por el contrario, son proyecciones subjetivas de origen humano, constructos intelectuales compartidos socialmente.

El énfasis que ambos pensadores ponían en estas metapreguntas bastaba, por sí solo, para separarlos de la mayoría de sus colegas. No sólo centraban su interés especulativo en el «metanivel», sino que también querían, lo cual era aún más inusitado, que su labor técnica arrojase «metaluz» sobre un panorama mucho más amplio. De hecho, Gödel, siendo aún universitario en Viena, había desarrollado la ambición de dedicarse *única y exclusivamente* al tipo de matemáticas que tuviese consecuencias filosóficas en más diferentes planos. Se trataba de un objetivo titánico y, en cierto modo, históricamente ambicioso, pero uno de los aspectos más asombrosos de su trayectoria es que logró alcanzarlo. Esa ambición colosal,

que conservaría toda la vida, pudo haber limitado el volumen de su actividad, pero también garantizó que toda su labor fuese profunda. El mismo Einstein, aun sin ser tan estricto consigo mismo como Gödel, compartía la convicción de que la verdadera ciencia nunca debe perder de vista las grandes cuestiones filosóficas: «La ciencia sin epistemología –en la medida en que tal cosa pueda siquiera concebirse– es primitiva y embrollada».

La amistad entre Einstein y Gödel se ha convertido en leyenda y sigue siendo objeto de conjeturas. Todos los días, iban y volvían juntos del Instituto, y los demás los miraban con curiosidad, asombrados de que tuviesen tanto que contarse. Por ejemplo, Ernst Gabor Strauss escribió:

La historia de la estancia de Einstein en Princeton no estaría completa sin una referencia a su cordial y estrechísima amistad con Kurt Gödel. Eran personas muy, muy dispares, pero por alguna razón se entendían bien y se apreciaban muchísimo. Einstein solía comentar que le parecía que no debería convertirse en matemático porque era tal la abundancia de problemas interesantes y atractivos que uno podía perderse en ellos sin llegar jamás a obtener nada verdaderamente relevante. En física, por el contrario, podía identificar cuáles eran los problemas importantes y, a base de firmeza y perseverancia, acometer su resolución. Pero una vez me dijo: «Ahora que he conocido a Gödel, me he dado cuenta de que lo mismo pasa con las matemáticas». Por supuesto, Gödel observaba el mundo a la luz de su interesante axioma, a saber, que nada de lo que sucede, sucede por accidente o estupidez. Si uno se toma verdaderamente en serio dicho axioma, todas las extrañas teorías en las que creía Gödel devienen absolutamente inevitables. Traté de desafiarlo varias veces, pero no había manera. Me refiero a que todas sus teorías se seguían naturalmente de su axioma. En realidad, a Einstein no le importaba; de hecho, le parecía la mar de divertido. Salvo la última vez que vimos al matemático, en 1953. Entonces, me dijo: «Gödel se ha vuelto completamente loco». Yo le pregunté: «Pero bueno, ¿qué ha hecho ahora que pueda ser peor que todo lo anterior?». Y Einstein me respondió: «Ha votado a Eisenhower».

Las palabras de Strauss revelan cierta perplejidad en cuanto a lo que los dos hombres veían el uno en el otro; en particular, lo que el sagaz físico podía haber visto en aquel lógico neurótico. Einstein, escribió Strauss, era «sociable, alegre, risueño y rebosaba sentido común». Gödel, por el contrario, era «sumamente formal, muy serio, bastante solitario y desconfiaba del sentido común como medio de alcanzar la verdad».

El Einstein del mito popular –con su mata de pelo rebelde, su natural despistado y su quijotesca adhesión política a la unidad mundial y otras causas perdidas– no suele aparecer representado como un hombre muy espabilado, ni de mucho mundo. Pero comparado con Gödel, lo era. En Princeton, casi todos, inclusive sus colegas matemáticos, tenían a Gödel, cuyo «interesante axioma» complicaba de manera exponencial toda discusión y decisión práctica, por un sujeto con quien hablar era punto menos que imposible. Como dice el matemático Armand Borel en su historia de la facultad de matemáticas del Instituto, a él y a otros «la lógica del sucesor de Aristóteles les resultaba de lo más desconcertante». Con el tiempo, los matemáticos resolverían el problema prohibiendo a Gödel la asistencia a sus reuniones y convirtiéndolo en un departamento unipersonal: el máximo –y único– responsable de todo lo estrictamente relacionado con la lógica.

Aunque la población de Princeton está más que acostumbrada a la excentricidad y ha aprendido a no mirar con recelo a especímenes desgachados que se quedan mirando al vacío cósmico con expresión ausente (o aparentemente ausente), Kurt Gödel dio la impresión a casi todo el mundo de ser un bicho raro de verdad, con quien el menor intercambio de palabras constituía un tremendo desafío. Y cuando, venciendo su natural reserva, hablaba, lo más probable es que dijese algo para lo cual no había respuesta posible.

John Bahcall era un joven y prometedor astrofísico a quien, en una pequeña cena celebrada en el Instituto, le presentaron a Gödel. Al identificarse como físico, Gödel le replicó secamente: «No creo en las ciencias naturales».

El filósofo Thomas Nagel también recuerda una pequeña cena en el Instituto en la que le tocó sentarse junto a Gödel, con quien

departió acerca del problema de la relación entre cuerpo y mente, un viejo hueso filosófico que ambos pensadores habían tratado de roer. Nagel le señaló a Gödel que su dualismo extremo (según el cual las almas y los cuerpos poseen existencias separadas y se unen en el nacimiento para conformar una especie de sociedad que se escinde al morir el individuo) resultaba difícil de conciliar con la teoría de la evolución. Gödel le respondió que no creía en la evolución y para más inri, como si el dato corroborase su rechazo del darwinismo, añadió: «Sabrá usted que Stalin tampoco creía en la evolución y era un hombre muy inteligente».

«Después de eso», me contó Nagel con una risita, «lo dejé por imposible».⁶

El lingüista Noam Chomsky también afirma haberse quedado de una pieza durante un encuentro con el lógico. Chomsky le preguntó en que andaba trabajando en esos momentos y recibió una respuesta que probablemente nadie desde Leibniz, el filósofo del siglo XVII, había dado: «Estoy tratando de demostrar que las leyes de la naturaleza son a priori».

Tres mentes prodigiosas, tan a gusto en el mundo de la pura abstracción como el que más, y así y todo, los tres (y no son los únicos) afirman haberse topado con una barrera infranqueable al discutir ciertas ideas con Gödel.

⁶ Cuanto mejor se comprende el pensamiento de Gödel, más comprensible resulta la animadversión que sentía por la teoría de la evolución. Un racionalista como él ansía suprimir toda traza de azar o casualidad, mientras que la selección natural recurre precisamente a lo contingente y aleatorio como fundamentos explicativos. En términos microevolutivos (cambios de una generación a otra), la teoría otorga un papel esencial a las mutaciones y recombinaciones aleatorias. En términos macroevolutivos (pautas a lo largo de la historia de la vida), otorga un papel esencial a la contingencia histórica, aspectos tales como los caprichos de la geología y el clima, o eventos tales como el impacto de un meteorito en la Tierra, que, al oscurecer el sol, habría acabado con los dinosaurios, posibilitando así que mamíferos del tipo del ratón ocupasen los nichos ecológicos que quedaron vacantes. (Doy las gracias a Steven Pinker por esta explicación.)

También Einstein hubo de enfrentarse, una y otra vez, durante sus diarios paseos de ida y vuelta al Instituto, a las extrañas intuiciones de Gödel, a su profundo «antiempirismo». No obstante, siguió procurando sistemáticamente la compañía del lógico. De hecho, el economista Oskar Morgenstern,⁷ que conocía a Gödel desde Viena, refería lo siguiente en una carta privada: «Einstein me contaba a menudo que en los últimos años de su vida buscaba continuamente la compañía de Gödel para poder debatir con él. Una vez me dijo que su propio trabajo ya no significaba gran cosa, que acudía al Instituto simplemente *um das Privileg zu haben, mit Gödel zu Fuss nach Hause gehen zu dürfen*», esto es, para tener el honor de volver caminando a casa con Gödel. Por más que compartiesen un interés en el metanivel de sus respectivas disciplinas, la confesa devoción de Einstein se antoja exagerada.

Por su parte, las cartas de Gödel a su madre Marianne, que se quedó en Europa (una correspondencia que nos proporciona algunos datos sobre la vida del lógico hasta la muerte de su progenitora en 1966), abundan en referencias a Einstein. Si Einstein, en sus últimos años, acudía al Instituto únicamente por el privilegio de volver a casa paseando con Gödel, éste no tenía a nadie más en el mundo con quien hablar, al menos de la forma como podía hablar con Einstein (exclusividad que resulta aún más patética si tenemos en cuenta que Gödel estaba casado). Así, por ejemplo, el 4 de julio de 1947 el lógico le cuenta a su madre que el médico le ha mandado a Einstein que guarde reposo. «Así que me he quedado bastante solo y apenas hablo con nadie en privado».

La estrecha amistad de los dos hombres era, y continúa siendo, un misterio para quienes fueron testigos de la misma. «Todos los días los veía atravesar el sendero desde Fuld Hall a Olden Farm», me contó en su despacho del Instituto el suizo Armand Borel, que

⁷ Morgenstern también había huido de Austria tras la ocupación nazi y había ingresado en el Instituto. Aunque era economista, su obra era lo bastante matemática –fue uno de los fundadores, junto con Von Neumann de la teoría de juegos– como para obtener la admisión en el Instituto de Flexner.

se incorporó al centro un poco después de Gödel. «No sé de qué hablarían. Seguramente de física, porque a Gödel también le interesaba esa materia.⁸ No querían hablar con nadie más. Sólo deseaban hablar el uno con el otro», dijo como conclusión, encogiéndose de hombros.

A la hora de entender la relación entre Einstein y Gödel y tratar de ver más allá de los perplejos comentarios de Straus («por alguna razón se entendían muy bien»), es importante no conformarse con la sencilla explicación de que ambos estaban intelectualmente hechos el uno para el otro, de que constituían, en palabras del lógico Hao Wang, «una “especie natural” de sólo dos miembros integrada por los “filósofos naturales” más destacados del siglo».⁹ Hay mucho más que decir, más allá incluso de la pertenencia a un club tan exclusivo, si se quiere explicar los vínculos que los ligaban.

Existen, qué duda cabe, semejanzas superficiales. Está el hecho, por ejemplo, de que los dos hubiesen producido lo fundamental de su trabajo en tierras germanófonas de la Europa central, de las que se vieron obligados a huir. Pero al menos en este sentido, tampoco es que Einstein y Gödel fuesen muy originales en el Princeton de entonces. Eran incontables los sabios que hubieron de huir de Viena, Göttingen y Budapest para afincarse en lugares como Pasadena y Princeton. El hecho de que ambos fuesen exiliados políticos que hablaban la misma lengua materna y de pronto se encontrasen en el improbable paisaje de las afueras de Nueva Jersey, no sirve ni remotamente para explicar la relación tan especial que mantenían, que dejaba estupefactos incluso a refugiados como ellos.

⁸ Gödel ideó una solución muy original a las ecuaciones de campo de la teoría general de la relatividad de Einstein, y se las entregó al físico como regalo sorpresa con ocasión de su septuagésimo cumpleaños. En la solución de Gödel, el tiempo es cíclico. Véase el capítulo 4.

⁹ Hao Wang (1921-1995), lógico de la Universidad Rockefeller, se dedicó a la comprensión de las opiniones de Gödel acerca de un sinfín de temas, desde la naturaleza de la intuición matemática hasta la transmigración de las almas, y publicó tres libros a partir de ese material.

Hay más similitudes sorprendentes entre los dos. Está el hecho, por ejemplo, de que ambos hubiesen producido lo fundamental de su trabajo a una edad bastante temprana. Einstein tenía 26 años en 1905, su *annus mirabilis*, cuando, trabajando como vulgar administrativo de una oficina de patentes de Berna, publicó sus artículos sobre la relatividad (especial), el cuanto lumínico y el movimiento browniano, además de completar su tesis doctoral. Gödel, por su parte, alcanzó sus resultados (que también eran tres, aunque el primero de los teoremas de la incompletitud deja muy atrás al resto)¹⁰ con tres años menos.

Más importante que esta coincidencia de detalles biográficos es el hecho de que los dos, a una edad aún más temprana, le diesen vueltas a la posibilidad de optar por la disciplina escogida por el otro. Gödel se matriculó en la Universidad de Viena con la intención de estudiar física. Einstein, en un principio, había pensado hacerse matemático. En cierto sentido, cada uno de los dos veía en el otro la plasmación de lo que podría haber sido él mismo de haber seguido su propósito inicial, lo cual, sin duda, ejercía una cierta fascinación.

Con todo, son muchas otras cosas las que los unían. A mi modo de ver, la razón del profundo entendimiento y aprecio que se profesaban estos dos personajes «tan dispares» radicaba en lo más hondo de sus revolucionarias ideas. Eran camaradas en el sentido más profundo en que dos pensadores pueden llegar a serlo. Los dos se hallaban comprometidos en una labor de entendimiento tanto de la realidad como de su propio quehacer en relación a esa realidad, lo cual los enfrentaba abiertamente a la comunidad internacional de pensadores.

Teniendo en cuenta que ambos produjeron resultados tan perturbadores que sus respectivas disciplinas se vieron obligadas a rehacerse para dar cabida en su seno a dichos resultados, lo último que

¹⁰ Sus otros dos logros, alcanzados en los años 1929-1930, son el segundo teorema de la incompletitud y la demostración de la completitud del cálculo de predicados.

cabría imaginar es que Einstein y Gödel se hubiesen sentido marginados. Los sentimientos de marginación, malquerencia, rechazo, aislamiento, son propios de fracasados, de individuos sin la menor influencia. Sin embargo, los dos se sentían malquistos e incluso rechazados –y además, en ambos casos, de una forma notablemente similar– en el metanivel de sus respectivos ámbitos, el nivel en el que se interpreta el significado global de lo que es la disciplina en sí.

Así pues, en cierto sentido, al menos según he podido deducir al tratar de penetrar el meollo de una amistad que desconcertaba a quienes la presenciaron, Einstein y Gödel eran compañeros de exilio dentro de un exilio mayor, algo que trasciende con mucho las circunstancias geopolíticas que les obligaron a refugiarse en Princeton. Creo que eran exiliados en el sentido más profundo en que pueda serlo un pensador. Por extraño que parezca habida cuenta de la celebridad que obtuvieron con sus descubrimientos, Einstein y Gödel eran exiliados intelectuales.

Para entender cabalmente la sensación de aislamiento que compartían y que constituyó el aglutinante de su famosa amistad, es necesario parar mientes en las metaconvicciones que los distanciaron de sus coetáneos. ¿Cómo hemos de interpretar, en relación a las grandes cuestiones filosóficas, la teoría de la relatividad de Einstein y los teoremas de incompletitud de Gödel? ¿Cómo interpretaban estas obras maestras del pensamiento sus creadores y cómo las interpretaban los demás?

Los teoremas de incompletitud de Gödel. La teoría de la relatividad de Einstein. El principio de incertidumbre de Heisenberg. Los nombres, ya de por sí, resultan sugerentes, casi tentadores, por cuanto parecen insuflar en la gélida corteza de la ciencia un cálido ingrediente humano; parecen incluso insinuar que el elemento humano prevalece sobre esos sistemas tan severamente precisos, los de las matemáticas y la física teórica, difuminándolos con nuestra propia inexactitud y subjetividad.

La adopción de la subjetividad en lugar de la objetividad –la adopción de los modos de razonamiento basados en principios tales como «nada existe sino como creación mental» o «el hombre es la medida de todas las cosas»– constituye una corriente de pensamiento

bien definida, cuando no dominante, de la vida intelectual y cultural del siglo xx. La obra de Gödel y Einstein –por todos reconocida como revolucionaria y designada con tan sugerentes nombres– suele citarse, junto con el principio de incertidumbre de Heisenberg, entre las razones más convincentes que nos ha brindado el pensamiento moderno para rechazar el «mito de la objetividad». Esta interpretación de la coalición tripartita ya forma parte en sí misma de la mitología moderna o, mejor dicho, posmoderna.

Así, por ejemplo, en *Copenhagen*, la elogiada pieza teatral de 1998, el dramaturgo Michael Frayn ilustra correctamente el rechazo por parte de los físicos Niels Bohr y Werner Heisenberg de la idea según la cual la física es la descripción de una realidad material objetiva, pero también identifica de forma inexacta la teoría de la relatividad de Einstein como el primero de los pasos tomados por la física moderna en dirección a ese rechazo ulterior:

Bohr: Sí, [la mecánica cuántica] funciona. Pero eso no es lo más importante. ¿Es que no ves lo que hicimos en esos tres años, Heisenberg? No es por exagerar, pero volvimos el mundo del revés. Sí, escucha, que ya llega, ya me viene... Volvimos a colocar al hombre en el centro del universo. A lo largo de la historia, nos hemos encontrado continuamente desubicados. No hemos dejado de exiliarnos a la periferia de las cosas. Primero nos convertimos en meros acólitos de los designios inescrutables de Dios. Minúsculas figuritas arrodilladas en la gran catedral de la creación. Y cuando apenas nos habíamos recobrado durante el Renacimiento, cuando apenas nos habíamos convertido, como proclamó Protágoras, en la medida de todas las cosas, resulta que el fruto de nuestro propio raciocinio ¡vuelve a dejarnos de lado! Volvemos a vernos empequeñecidos mientras los físicos construyen las nuevas y colosales catedrales para que las contemplemos anonadados: las leyes de la mecánica clásica que nos preceden desde los albores de la eternidad y que nos sobrevivirán hasta el fin de la eternidad, que existen independientemente de si nosotros existimos o no. Hasta que llegamos al siglo veinte y, de repente, nos vemos obligados a ponernos de nuevo en pie.

Heisenberg: Todo empieza con Einstein.

Bohr: Efectivamente. Einstein demuestra que la medición –el fundamento sine qua non de toda ciencia– no es un acontecimiento impersonal que tenga lugar con imparcial universalidad. Es un acto humano, realizado desde un punto de vista espacio-temporal concreto, desde el punto de vista particular de un posible observador. Aquí, en Copenhague, en esos tres años, mediada la década de los veinte, descubrimos que no existe un universo objetivo que podamos definir con exactitud. Que el universo existe sólo como una serie de aproximaciones. Sólo dentro de los límites que establece nuestra propia relación con él. Sólo a través del entendimiento alojado en el cerebro humano.

Al igual que la teoría de la relatividad de Einstein, los teoremas de incompletitud de Gödel ocupan, según algunos, un lugar destacado en la sublevación intelectual que tuvo lugar en el siglo xx contra la objetividad y la racionalidad. Por ejemplo, en una conocida obra filosófica escrita por William Barrett, *Irrational Man: A Study in Existentialist Philosophy* y publicada en 1962, mientras Gödel aún vivía (y que me obligaron a leer el verano antes de entrar en la universidad), el lógico figura junto a Martin Heidegger (1889-1976) y Frederick Nietzsche (1844-1900), ilustres destructores de nuestras ilusiones de racionalidad y objetividad:

Las consecuencias de los hallazgos de Gödel se antojan aún más trascendentales [que el principio de incertidumbre de Heisenberg y el de complementariedad de Bohr] habida cuenta de que en la tradición occidental, desde los pitagóricos y Platón en adelante, la concepción de las matemáticas como modelo de inteligibilidad por antonomasia ha sido el bastión fundamental del racionalismo. Ahora resulta que ni siquiera en la más exacta de las ciencias –en el ámbito donde la razón humana parecía omnipotente– consigue librarse el hombre de su finitud connatural: cualquier sistema matemático que construya estará condenado a la incompletitud. Gödel ha demostrado que las matemáticas adolecen de problemas irresolubles y que, por tanto, jamás podrán conformar un sistema completo... Los matemáticos ya saben que nunca podrán tocar fondo; de hecho, es que no

existe tal fondo toda vez que las matemáticas no poseen ninguna realidad autosuficiente que subsista con independencia de la actividad que llevan a cabo los matemáticos.

Barrett enuncia correctamente el (primer) teorema de la incompletitud, esto es, que las matemáticas nunca podrán formalizarse en sistema completo alguno. Y la conclusión filosófica que saca de ello sintoniza muy mucho con las tendencias intelectuales más en boga del siglo xx. De modo que el lector tal vez se sorprenda al enterarse de que el propio Gödel nunca llegó a semejante conclusión. De hecho, si borramos el «no» de delante de «poseen» y sustituimos el «ninguna» de delante de «realidad autosuficiente» por «una», obtendremos un enunciado muy preciso de la verdadera visión metamatemática de Gödel, la visión que inspiró toda su obra, incluidos sus célebres teoremas de la incompletitud.

Aunque algunos gurús intelectuales hayan visto en Gödel un agente más de la gran rebelión contra la objetividad y la racionalidad que caracteriza buena parte del pensamiento del siglo xx, no es ésa la interpretación que el propio lógico hacía de sus revolucionarios descubrimientos. Lo mismo exactamente cabe decir de Einstein. Ambos, en efecto, creían firmemente en la objetividad y veían en sus respectivas obras un refrendo definitivo a esa postura cada vez más impopular. Mientras que muchos de sus colegas tomaban el camino del subjetivismo –citando precisamente los grandes logros de la teoría de la relatividad y los teoremas de la incompletitud como los hitos que los encaminaban en esa dirección–, Einstein y Gödel no hicieron lo propio.

Tanto Einstein como Gödel están tan lejos como el que más de suscribir el viejo adagio sofista de que «el hombre es la medida de todas las cosas». Para ambos pensadores, la metodología de sus respectivas disciplinas –las complejas combinaciones del razonamiento, que incluyen tanto la deducción como la intuición (y, en el caso de la física, por cuanto no es a priori, también la observación)– no consiste en una serie de normativas arbitrarias que regulan un juego mental o lingüístico, intrincado y artificial, que bien pudiera haberse jugado con arreglo a cualquier otra normativa, lo

cual habría dado lugar a una construcción de la realidad completamente diferente. No, ambos pensadores coinciden en que la metodología es el conjunto de reglas que conducen a nuestras mentes más allá de las circunscripciones de la experiencia personal abriéndoles las puertas a aspectos de la realidad que de otra forma sería imposible conocer.

El profundo aislamiento de Einstein respecto a sus colegas científicos es una faceta tan conocida (aunque no muy bien entendida) como casi todas las demás de su celebrada existencia. La explicación que suele dársele es su quisquilloso rechazo del revolucionario avance de la mecánica cuántica, en concreto de su naturaleza fundamentalmente estocástica de la que es imposible erradicar el componente puramente aleatorio. Según la versión más conocida de su historia, el físico, después de haber llevado a cabo en sus años mozos su propia revolución conceptual mediante las teorías de la relatividad, tanto la general como la especial, habría desarrollado, como suelen hacer las personas de edad madura, una mentalidad conservadora incapaz de digerir las revoluciones de la siguiente generación, por mucho que esas revoluciones subsecuentes fuesen lógicas derivaciones de la suya. Esta versión de la historia de Einstein forma asimismo parte de la mitología intelectual del siglo xx.

Pero no se ajusta a la verdad. El quid de la alienación científica de Einstein estriba en su rechazo de ese viraje subjetivista que lleva al dramaturgo a declarar, por boca de sus personajes, que «todo empezó con Einstein». Einstein no entendía que su teoría de la relatividad condujese a la interpretación subjetiva de la física, sino más bien a todo lo contrario. La «relatividad», tal como figura en la teoría de Einstein, significa algo mucho más técnico y restringido que el aserto de que la medición (y por consiguiente todo lo demás) es relativa al punto de vista humano.¹¹ Para Einstein, de hecho, el haber seguido a gente como Werner Heisenberg y Niels Bohr por

¹¹ Según la relatividad especial, la medición de propiedades tales como la longitud son relativas a un sistema de coordenadas o un marco de referencia concretos. Pero tratar de reducir estos términos técnicos –sistema de coordenadas, marco de referencia– a la idea de puntos de vista humanos es, sencilla-

la vía del subjetivismo habría significado negar lo que el físico consideraba las «metaimplicaciones» fundamentales de la teoría de la relatividad. Según la interpretación de Einstein, la teoría representa la naturaleza objetiva del espacio-tiempo, algo muy diferente de nuestro punto de vista humano y subjetivo de ese espacio-tiempo.¹² Lejos de colocarnos nuevamente en el centro del universo, describiéndolo todo como relativo a nuestro punto de vista experiencial, la teoría de Einstein, expresada en un hermoso lenguaje matemático, nos permite entrever una realidad física verdaderamente asombrosa, y digo asombrosa porque no se parece en nada a la que percibimos empíricamente.

Einstein se refiere en ocasiones a la realidad objetiva como «más allá», y en las «Notas autobiográficas» que redactó con su proverbial buen humor para su inclusión en el *Festschrift* que P. A. Schilpp publicó en honor del septuagésimo aniversario del físico,¹³ identi-

mente, un disparate. Disponemos de varios sistemas de coordenadas para describir el movimiento de un objeto y, según la teoría de la relatividad, todos los sistemas son iguales: ninguno presenta ventajas sobre el resto. En un sistema de coordenadas, un «observador» (que ni siquiera tiene por qué ser una entidad consciente y, por tanto, no tiene que estar literalmente observando, ni tan siquiera ser capaz de observar nada) permanecerá en reposo; en otro estará en movimiento. Lo normal, aunque no obligatorio, suele ser escoger un sistema respecto del cual un observador concreto esté en reposo. Así, lo normal (aunque no obligatorio) suele ser escoger el sistema de coordenadas en el que la Tierra, por ejemplo, está en reposo. En ese caso, el movimiento de todos los seres terrestres, con nuestra infinidad de puntos de vista, se describiría como relativo a un sistema de coordenadas en el cual la Tierra está en reposo.

¹² Por ejemplo, en la teoría de la relatividad el tiempo no fluye sino que, como cuarta dimensión, es tan estático como el espacio. En marcado contraste con esto, el aspecto más espectacular (y doloroso) de nuestra experiencia subjetiva del tiempo es lo incesante y unidireccional de su discurrir, que nos arrastra desde el pasado hacia el futuro.

¹³ «Heme aquí escribiendo, a mis 67 años, algo así como mi propia necrológica. No lo hago sólo porque el doctor Schilpp me haya convencido a tal efecto, sino porque realmente creo que es bueno mostrar a quienes bregan codo con codo con nosotros, cómo vemos, en retrospectiva, nuestra propia brega, nuestra propia búsqueda».

fica explícitamente su creencia en esa realidad como el eje espiritual de su vida como científico:

Tengo muy claro que el paraíso religioso de la juventud, que de ese modo perdí, constituyó un primer intento de romper las cadenas de lo «meramente personal», de escapar de una existencia dominada por los anhelos, las esperanzas y los sentimientos primarios. Más allá se extendía ese mundo inmenso que existe independientemente de nosotros los humanos y que nos plantea un enigma enorme y eterno, aunque al menos accesible en parte a nuestra inspección y pensamiento. La contemplación de ese mundo me atraía como una liberación... La comprensión de este mundo extrapersonal dentro del marco de lo posible se aparecía ante mis ojos, mitad consciente mitad inconscientemente, como el más insigne propósito... La senda que conducía a este paraíso no era tan placentera ni tan atrayente como la del paraíso religioso. Sin embargo, ha demostrado ser tan digna de confianza como aquella y jamás me he arrepentido de haberla enfilado.

He ahí una elocuente declaración del credo científico de Einstein; realmente cuesta imaginar algo más discordante con el sentir de la práctica totalidad de los físicos más destacados de su círculo.¹⁴ Einstein consideraba que la función de la física era descubrir teorías que ofreciesen un vislumbre de la naturaleza objetiva que existe «más allá» de nuestras experiencias. Werner Heisenberg, junto con científicos como el danés Niels Bohr y el alemán Max Born (los tres insignes paladines de la interpretación de la mecánica cuántica representada en la obra *Copenhagen*), rechaza tal parecer en nombre de un movimiento intelectual conocido como «positivismo», según el cual todo intento de indagar más allá de nuestra experiencia tiene como resultado la más absoluta sandez.

¹⁴ Compárese, por ejemplo, con esta afirmación de Werner Heisenberg: «la idea de un mundo real objetivo cuyos componentes más pequeños existan objetivamente en el mismo sentido en que existen las piedras o los árboles, independientemente de si los observamos o no... es imposible».

El positivismo, sobre todo en la forma como lo propugnaba el grupo de científicos, matemáticos y filósofos del afamado Círculo de Viena, notablemente influidos por el carismático filósofo vienés Ludwig Wittgenstein, es una rigurosa teoría del sentido que usa y abusa del sintagma «sin sentido». En concreto, se lo aplica a toda proposición descriptiva¹⁵ que en principio no pueda verificarse mediante el contenido de nuestra experiencia. El sentido de una proposición viene dado por el medio de verificarla empíricamente (criterio verificacionista del sentido).

Gödel, como Einstein, está comprometido con la posibilidad de trascender, con el debido respeto a los positivistas, nuestras experiencias a fin de describir el mundo que hay «más allá». Sólo que, como el ámbito de Gödel es el de las matemáticas, el «más allá» que a él le interesa es la esfera de la realidad abstracta. Su compromiso con la existencia objetiva de la realidad matemática constituye lo que se llama realismo conceptual o matemático. También recibe el nombre de platonismo matemático, en honor al filósofo griego cuya metafísica rechazaba con vehemencia el apotegma del sofista Protágoras: «El hombre es la medida de todas las cosas».

El platonismo matemático sostiene que las verdades matemáticas son independientes de cualesquiera actividades humanas, tales como la construcción de sistemas formales, con sus axiomas, definiciones, reglas de inferencia y demostraciones. Las verdades matemáticas están determinadas, según el platonismo, por la propia realidad de las matemáticas, por la naturaleza de las entidades reales, aunque abstractas (números, conjuntos, etc.), que conforman dicha

¹⁵ Se entiende por proposición descriptiva aquella que no es verdadera (o falsa) en virtud únicamente de su significado. Las proposiciones cuyo valor de verdad (o de falsedad) es una función de su significado y de nada más se llaman «analíticas» o, en ocasiones, «triviales». Así, por ejemplo, la proposición «Todas las personas bilingües hablan por lo menos dos idiomas» es analítica. Por otro lado, una proposición descriptiva no es verdadera o falsa en virtud simplemente de su significado, sino también de los hechos a que alude. Así, la proposición «soy bilingüe» es falsa en virtud tanto de su significado como del hecho en cuestión.

realidad. La estructura, pongamos por caso, de los números naturales (esto es, los números de toda la vida que usamos para contar: 1, 2, 3, etc.) existe, según el realismo matemático, independientemente de nosotros, igual que existe, según el realismo físico, la estructura espacio temporal; y las propiedades de los números 4 y 25 –por ejemplo, que uno es par, el otro impar y que ambos son cuadrados perfectos– son tan objetivas como lo son, para un físico realista, las propiedades físicas de la luz y la gravedad.

Para Gödel, las matemáticas son un medio de revelar las características de la realidad matemática objetiva, de la misma forma que la física, para Einstein, es un medio de revelar aspectos de la realidad física objetiva. La explicación que da Gödel de lo que hacemos cuando operamos con matemáticas puede expresarse parafraseando el credo einsteniano: «Más allá se extiende un mundo inmenso que existe independientemente de nosotros los humanos y que nos plantea un enigma enorme y eterno, aunque al menos parcialmente accesible a nuestra inspección y pensamiento». Sólo que en este caso el «más allá» ha de entenderse como una región aún más alejada del sujeto de experiencia y de su inconfundible punto de vista humano. Ese «más allá» trasciende la dimensión física espacio temporal; es una realidad puramente abstracta, de verdades universales y necesarias, y nuestra facultad de razonar a priori nos proporciona –misteriosamente– los medios para acceder a ese «más allá», para obtener vislumbres siquiera parciales de lo que podríamos llamar (recurriendo al adjetivo de moda a la hora de titular programas televisivos: «Supervivencia extrema», «Lo más extremo») «realidad extrema».

El platonismo matemático de Gödel en sí no era algo insólito. Muchos matemáticos han sido realistas; e incluso los que no se definen como tales, cuando se ven acorralados porque alguien les pregunta a bocajarro cuál es su postura metamatemática, incurren inconscientemente en el realismo al referirse a su propio trabajo como sus «descubrimientos».¹⁶ G. H. Hardy (1877-1947), un eminente mate-

¹⁶ Curiosamente, tal es el caso incluso de David Hilbert, cuyo formalismo era diametralmente opuesto al platonismo (véase el capítulo 2).

mático inglés, expresó sus propias convicciones platónicas en su clásica *Apología de un matemático*, que no pide disculpa alguna:

Creo que la realidad matemática existe fuera de nuestra mente, que nuestro cometido consiste en descubrirla u observarla y que los teoremas que demostramos, y que con tanta grandilocuencia denominamos nuestras «creaciones», no son más que los apuntes de nuestras observaciones. Este parecer lo han sostenido, de una forma u otra, muchos filósofos de gran renombre de Platón en adelante, y yo emplearé el lenguaje propio de quien comulga con esa idea...

Esta postura realista es mucho más verosímil en el terreno de las matemáticas que en el de la realidad física, porque los objetos matemáticos son mucho más «lo que parecen». Una silla o una estrella no son en absoluto lo que parecen; cuanto más lo pensamos, más se desdibujan sus contornos en la neblina sensorial que las envuelve; en cambio, el 2 o el 317 no tienen nada que ver con sensación alguna y sus propiedades se perfilan con mayor nitidez cuanto más a fondo los examinamos. Puede que la física moderna encaje mejor en un marco de filosofía idealista; yo, personalmente, no lo creo, pero hay físicos eminentes que así lo afirman. Las matemáticas, sin embargo, me parecen el escollo donde encalla todo idealismo: el 317 es un número primo, no porque lo creamos nosotros, ni porque nuestras mentes estén configuradas así o así, sino porque lo es y punto, porque la realidad matemática está construida de esa forma.¹⁷

¹⁷ Las circunstancias en que Hardy escribió su clásico son tan conmovedoras como insólitas. Se le había agotado la creatividad matemática, algo que suele ocurrirles a los matemáticos a una edad relativamente temprana. (A los cuarenta años, lo más probable es que a un matemático ya se le haya pasado su mejor época, razón por la cual el galardón más prestigioso que se concede a los matemáticos, la medalla Fields [no existe el premio Nobel de matemáticas] premia exclusivamente a menores de 40 años.) Hardy intentó suicidarse, sobrevivió al intento, y C. P. Snow lo convenció de que escribiese un libro explicando la vida de un matemático inútil. El resultado, *Apología de un matemático*, es incomparable. Poco después de terminarlo, Hardy volvió a intentar suicidarse, esta vez con éxito.

Los casi tres milenios transcurridos desde Platón nos han proporcionado muchas e increíbles innovaciones matemáticas, pero no muchos más motivos para creer en el platonismo de las que tenía el propio filósofo griego. Un matemático tras otro ha declarado, como Hardy, su convicción platónica de que las verdades matemáticas no se crean sino que se descubren. Con todo, ninguno pasaba de la mera declaración... hasta que llegó Gödel. Fue precisamente la osada ambición de Gödel de llegar a una conclusión matemática que fuese al mismo tiempo un resultado metamatemático que refrendase el realismo matemático, la que propició sus teoremas de incompletitud.

La visión metamatemática de Gödel, su afirmación de la existencia objetiva e independiente de la realidad matemática, constituyó tal vez la razón de ser de su vida, lo cual corrobora algo indudablemente cierto: que era un tipo raro de verdad. Su orientación filosófica no era expresión de su labor matemática, sino al contrario: su labor matemática era expresión de su orientación filosófica, de su platonismo, que por tanto era la más profunda expresión del hombre propiamente dicho. Que su obra, como la de Einstein, se haya interpretado no sólo como un producto congruente con la rebelión contra la objetividad, sino como uno de sus más potentes catalizadores, resulta, pues, más que paradójico.

Einstein tuvo la suerte, en sus últimos años, de poder contar con un alma filosófica gemela, aunque fuese una tan inestable y fantasmiosa como la de Gödel, para mitigar la sensación de exilio. Las palabras de Einstein que reprodujo Morgenstern, aquello de que en sus últimos años acudía a su despacho en el Instituto sólo para tener el honor de volver a casa paseando con Gödel, resultan, matizadas por la metaluz, menos sorprendentes.

Tras la muerte en 1955 de Einstein, la sensación de exilio intelectual de Gödel se agudizó; la persona con quien más podía sentirse identificado, el súper racionalista Leibniz, llevaba trescientos años muerto. Las explicaciones a que llegaba el lógico mediante la aplicación rigurosa de su «interesante axioma» fueron volviéndose cada vez más lúgubres. El otrora joven del traje blanco inmaculado se consumió hasta convertirse en un hombre escuálido, eternamente sepultado bajo un grueso abrigo y una bufanda, aun en los tórridos y

bochornosos veranos de Nueva Jersey, que veía conspiraciones por todas partes. Llegó a creer que existía una enorme confabulación, que supuestamente estaba en marcha desde hacía siglos, para eliminar la verdad y «volver a los hombres necios». Aquéllos que, como Leibniz, el pensador del siglo xvii, y Gödel, el del xx, habían descubierto el verdadero poder del razonamiento a priori, estaban, creía él, fichados. Su profundo aislamiento, alineación incluso, con respecto a sus semejantes era un excelente caldo de cultivo para esa racionalidad desenfrenada que es la paranoia.

Muchos han juzgado paradójico que el mayor lógico desde Aristóteles pudiese sacar conclusiones tan ilógicas sin apartarse ni un ápice del rumbo dictado por la razón. Pero, tal y como se explica, espero que con claridad, en los capítulos siguientes, las paradojas de la personalidad de Gödel estaban provocadas, al menos en parte, por la paradójica respuesta que el mundo dio a su famosa obra. Sus teoremas de incompletitud fueron, al mismo tiempo, aplaudidos e ignorados. El contenido técnico de los mismos transformó el campo de la lógica y la matemática; el método de demostración que empleó Gödel, los conceptos que definió en el proceso, abrieron el camino a áreas de investigación completamente nuevas, tales como la teoría de funciones recursivas y la teoría de modelos. Otras áreas hasta entonces capitales, en concreto las que ratificara David Hilbert (1862-1943), el matemático más destacado de la generación inmediatamente anterior a la de Gödel, fueron abandonadas después de que los teoremas de Gödel demostrasen su futilidad.

Con todo, la trascendencia matemática de los teoremas, el aspecto que más le importaba a Gödel, no se tuvo en cuenta. Y lo que es más paradójico aún, las corrientes culturales más vigorosas, las mismas que pregonaban la incertidumbre posmoderna y clamaban contra la falsa mitología de todo absoluto, echaron mano de sus teoremas, junto con la teoría de la relatividad de Einstein, y los reinterpretaron de manera que refutasen precisamente las mismas convicciones que con tanta pasión habían tratado de demostrar Gödel y su compañero de exilio.

En sentido técnico, las paradojas son esas catástrofes de la razón en virtud de las cuales la mente se ve obligada, por la propia lógi-

ca, a extraer conclusiones contradictorias. Muchas son de la variedad auto referencial; los problemas surgen porque algún objeto lingüístico –una descripción, una frase– se refiere potencialmente a sí mismo. La más antigua de estas paradojas es la conocida como «la paradoja del mentiroso», cuyo linaje se remonta a la Grecia clásica.¹⁸ Se basa en la frase auto referencial: «Esta afirmación es falsa». La frase, como todas las frases, ha de ser verdadera o falsa. Pero si es verdadera, es falsa, puesto que eso es lo que dice textualmente; y si es falsa, bueno, en ese caso, resulta que es verdadera puesto que, de nuevo, eso es lo que afirma. Así pues, ha de ser verdadera y falsa al mismo tiempo, y eso es un problema muy grave. La mente se bloquea.

Paradojas como la del mentiroso desempeñan un papel técnico en la demostración que Gödel ideó para su extraordinario primer teorema de incompletitud. Gödel fue capaz de coger la estructura de las paradojas auto referenciales –el tipo de estructura que hace que se nos bloquee la mente cuando reflexionamos sobre la proposición «Esta afirmación es falsa»– y transformarla en una extraordinaria demostración de uno de los resultados más sorprendentes de la historia de las matemáticas.¹⁹ Esto en sí resulta casi paradójico. Las paradojas siempre han parecido diseñadas específicamente para convencernos de que no somos lo bastante listos como para captar el asunto que nos ha conducido hasta ellas. Gödel fue capaz de convertir el material de las paradojas, que tanto abochorna a la

¹⁸ He aquí la referencia textual de la que procede la paradoja: «Uno de ellos, a quien incluso tenían por profeta, dijo: “Los cretenses siempre mienten”... Este testigo dice la verdad». (Tito Livio I: 12-13.)

¹⁹ Que una conclusión matemática tenga la capacidad de sorprendernos puede parecer en sí paradójico. La realidad es perfectamente capaz de sorprendernos –y de hecho nos sorprende– con desenlaces distintos de lo esperado; nuestra experiencia del mundo suele depararnos sorpresas muy desagradables. Sin embargo, ¿cómo es posible que una conclusión que es fruto exclusivamente de un razonamiento a priori pueda hacer otro tanto? Si las verdades a priori son por definición inmunes a la revisión empírica, entonces no es una experiencia inesperada del mundo la que nos asesta el golpe. Debemos de ser nosotros mismos quienes deducimos la perplejidad, lo cual, a simple vista, se

inteligencia, en una demostración que nos permite entender mejor la naturaleza de la verdad, el conocimiento y la certeza. Según la interpretación platónica que el propio Gödel hace de su demostración, lo que ésta pone de manifiesto es que cuando nuestras mentes conocen las matemáticas están superando las limitaciones de los sistemas construidos por el hombre y captando las verdades independientes de la realidad abstracta.

La estructura de la demostración de Gödel, el uso que hace de la antigua paradoja, apela en cierto nivel, siquiera metafóricamente, a las paradojas del cuento que el siglo xx se contó a sí mismo acerca de sus mayores logros intelectuales, incluidos, desde luego, los teoremas de la incompletitud. Tal vez un día, un historiador del pensamiento explique el viraje subjetivista que dieron muchos de los pensadores más influyentes del siglo pasado, incluidos no sólo filósofos sino científicos a ultranza como Heisenberg y Bohr. Esa explicación rebasa con mucho el alcance de este libro. Pero lo que sí puedo hacer es describir cómo afectó la revuelta contra la objetividad a uno de los mayores pensadores del siglo xx: cómo lo impulsó a desarrollar su demostración de los teoremas de incompletitud y cómo dicha revuelta reinterpretó después esos mismos teoremas para ratificarse a sí misma.

Para entender cabalmente la riqueza –y la paradoja– de Gödel, su mundo y su obra, será necesario retroceder dos pasos desde esa imagen entrevista de su paseo con Einstein por una umbría calle de Princeton. Primero nos remontaremos a la Viena de su juventud, en la década de 1920, escenario de muchos de los ataques intelectuales y culturales emprendidos contra la tradición; después, retrocederemos más aún, hasta finales del siglo xix, cuando cierta concepción de las matemáticas dio origen a un programa encaminado a completarlas que terminaría sucumbiendo a la desmesurada ambición metamatemática de un joven lógico.

antoja extraño. Esta cuestión metamatemática también es abordada por el prolijo primer teorema de Gödel. Para Gödel, la realidad independiente de las matemáticas, de la cual nuestros axiomas no son sino descripciones incompletas, erradica de la «sorpresividad» de las matemáticas el factor sorpresa.

