1. EL CONCEPTO DE INTERÉS

1.1 Introducción

Tal y como se ha señalado en el prefacio, en estos primeros capítulos se va a suponer ambiente de certidumbre, es decir, que los agentes económicos conocen con total certeza el valor que en el futuro van a tomar las variables económicas. Pues bien, en este contexto, entendemos por *interés* el precio o recompensa a pagar por la disposición de capitales ajenos durante un determinado periodo de tiempo.[1] Evidentemente, este precio va a depender, en primer lugar, de la cuantía del capital dispuesto y de la amplitud del intervalo de tiempo durante el cual se va a disponer de este capital. Ahora bien, el nivel de ese precio en términos relativos, es decir, el precio o recompensa que se va a pagar por unidad de capital y por unidad de tiempo (que denominaremos, en general, *tipo de interés*[2]) viene determinado por la oferta y demanda de dinero en la economía, oferta y demanda que, a su vez, dependen de la política monetaria y fiscal, así como de las expectativas de los agentes económicos sobre el comportamiento futuro de la actividad económica. Cómo interaccionan todos estos factores y la determinación a partir de ellos del nivel de los tipos de interés va más allá del objetivo de este libro. Por el contrario, en el contexto de este manual supondremos que se trata de una variable cuya dinámica y nivel actual vienen determinados exógenamente.

Para comenzar a estudiar estos conceptos empezaremos analizando las operaciones financieras más elementales: aquellas consistentes en la disposición, durante un determinado periodo de tiempo, de un capital perteneciente a otra persona u organización quedando obligada la otra parte a la devolución, al final de ese periodo de tiempo, de aquel capital más una recompensa que hemos denominado interés.

[1] De esta definición se desprende que el interés deberá medirse en unidades monetarias.

[2] A diferencia del interés, el *tipo de interés* será una magnitud independiente de la unidad monetaria escogida, pero dependiente de la unidad de tiempo con la que se está trabajando.

Para ir desarrollando los diferentes conceptos que se tratan en este capítulo, introduciremos una hipótesis adicional: la inexistencia de oportunidades de arbitraje en la economía. Esta hipótesis (más realista cuanto más eficiente y desarrollados sean los mercados financieros) se va a traducir en que dos operaciones equivalentes deben generar el mismo interés (por ejemplo, dos de estas operaciones equivalentes en ambiente de certidumbre serían (a) prestar una determinada cantidad de dinero a dos años o (b) proceder a prestar esa misma cantidad de dinero a un año y volver a prestar la cuantía resultante un año más).

Así, podemos plantear una operación en la que un individuo "presta" a otro en la fecha actual (que denotaremos por t_0) un capital de cuantía C unidades monetarias (u.m.) con el compromiso, por parte de este último, de devolver con posterioridad (en $t_1 > t_0$) dicho capital más una recompensa (interés) de cuantía I. Por tanto, la operación financiera elemental consiste en la entrega de un capital de cuantía C en t_0 a cambio de un capital de cuantía $C + I$ en t_1.

Ahora bien, ¿cómo se determina la cuantía de esa recompensa por disponer de un capital de C u.m. durante un periodo de amplitud $t_1 - t_0$?

En la práctica nos encontramos fundamentalmente con dos procedimientos o regímenes para la determinación del *interés*. El más elemental consiste en aplicar el régimen de capitalización simple que, a su vez, conduce de forma natural al segundo procedimiento, el régimen de capitalización compuesta.

1.2 Régimen de capitalización simple

Bajo este régimen, el interés I a pagar por la disposición de un capital de cuantía C se determina de forma proporcional al capital dispuesto y al periodo de disposición. De esta forma, el interés de la operación elemental que hemos descrito en el apartado anterior se determina según la siguiente expresión:

$$I = C \cdot i \cdot n, \qquad [1]$$

siendo

C = la cuantía del capital dispuesto en u.m.

n = el periodo de tiempo de la operación expresado en unidades de tiempo (se supondrá que la unidad de tiempo es el año siempre y cuando no se diga lo contrario).

i = el *tipo de interés* pactado, es decir, el precio a pagar al final de la operación por unidad de capital prestado y por unidad de tiempo.

Ejercicio 1. Un individuo toma prestado de una entidad financiera un capital de 8.000 euros durante un periodo de 30 días. La operación ha sido pactada bajo el régimen de capitalización simple y con un tipo de interés del 5% anual. Determine la cuantía de los intereses a pagar por dicho individuo.

Según la expresión [1], la cuantía de los intereses generados por la operación viene dada por la expresión

$$I = C \cdot i \cdot n = 8.000 \cdot 0{,}05 \cdot \frac{30}{365} = 32{,}88 \text{ euros.}$$

Obsérvese que al estar expresado el tipo de interés en tanto por ciento "anual", el periodo de tiempo que dura la operación ha de venir expresado en esa misma unidad de tiempo, es decir, en años.

En este sentido, es práctica habitual del mercado determinar "n" (la duración de la operación) mediante dos procedimientos: con el año natural o trabajar con el año comercial.

Si se trabaja con el año natural (o base 5),

$$n = \frac{\text{Nº de días de la operac}}{365}. \qquad [2]$$

Por el contrario, si se trabaja con el año comercial (o base 0),

$$n = \frac{\text{Nº de días de la operación}}{360}. \qquad [3]$$

Esta segunda modalidad de liquidación (capitalización simple y año comercial) genera, obviamente, mayores intereses que la primera para un mismo valor de "i" y un mismo periodo de tiempo.

Hay que poner de manifiesto que el tipo de interés bajo el régimen de capitalización simple es una magnitud que depende inversamente de la unidad de tiempo con la que se esté trabajando. Así, si la unidad de tiempo escogida es equivalente a $1/m$ años, el tipo de interés "i^*" expresado en la nueva unidad de tiempo equivalente a un tipo de interés anual i deberá verificar que

$$I = C \cdot i^* \cdot n^* = C \cdot i \cdot n,$$

siendo $n^* = n \cdot m$, el número de nuevas unidades de tiempo incluidas en n años. Por tanto,

$$C \cdot i^* \cdot (n \cdot m) = C \cdot i \cdot n \qquad i^* = i/m.$$

De esta forma, y continuando con el ejercicio anterior, tenemos que el tipo de interés semestral, que bajo el régimen de capitalización simple es equivalente a un tipo de interés anual del 5%, será

$$i^* = i/m = 0{,}05/2 = 0{,}025 \text{ o } 2{,}5\%.$$

De igual modo, el tipo de interés trimestral equivalente al 5% anual será i^{**} = 0,05/4 = 0,0125 y el tipo de interés mensual equivalente al 5% anual será i^{***} = 0,05/12 = 0,004167.

Ejercicio 2. En el mercado interbancario, los tipos de interés medios practicados para diferentes plazos el día 13 de enero de 1999 eran los siguientes:

Plazo	Tipo de interés medio (%)
Día a día	3,18
Una semana	3,19
Un mes	3,22
Tres meses	3,16
Seis meses	3,15
Un año	3,11

Teniendo en cuenta que las operaciones en este mercado se liquidan aplicando el régimen de capitalización simple y año comercial, determine la cuantía a devolver al final de la operación si una entidad financiera depositara en otra un capital de 10.000.000 de euros a los tipos de interés medios indicados anteriormente:

a) Día a día:

Los intereses generados por la operación son

$$I_1 = 10.000.000 \cdot 0{,}0318 \cdot \frac{1}{360} = 883{,}33 \text{ euros}$$

y, por tanto, la cuantía a devolver sería

$$C_1 = C + I_1 = 10.000.000 + 883{,}33 = 10.000.833{,}33 \text{ euros.}$$

b) Una semana:

Intereses generados

$$I_2 = 10.000.000 \cdot 0{,}0319 \cdot \frac{7}{360} = 6.202{,}78 \text{ euros.}$$

Cuantía a devolver

$$C_2 = C + I_2 = 10.000.000 + 6.202{,}78 = 10.006.202{,}78 \text{ euros.}$$

c) Un mes:
Intereses generados

$$I_3 = 10.000.000 \cdot 0{,}0322 \cdot \frac{31}{360} = 27.727{,}78 \text{ euros.}$$

Cuantía a devolver el 12 de febrero de 1999

$$C_3 = C + I_3 = 10.027.727{,}78 \text{ euros.}$$

d) Operación a tres meses:
Intereses generados

$$I_4 = 10.000.000 \cdot 0{,}0316 \cdot \frac{90}{360} = 79.000 \text{ euros.}$$

Cuantía a devolver

$$C_4 = C + I_4 = 10.000.000 + 79.000 = 10.079.000 \text{ euros.}$$

e) Operación a seis meses:
Intereses generados

$$I_5 = 10.000.000 \cdot 0{,}0315 \cdot \frac{181}{360} = 158.375 \text{ euros.}$$

Cuantía devolver

$$C_5 = C + I_5 = 10.158.375 \text{ euros.}$$

f) Operación a un año:
Intereses generados

$$I_6 = 10.000.000 \cdot 0{,}0311 \cdot \frac{365}{360} = 315.319 \text{ euros.}$$

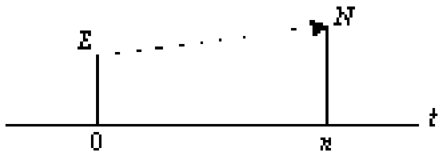
Cuantía a devolver

$$C_6 = C + I_6 = 10.000.000 + 315.319 = 10.315.319 \text{ euros.}$$

Es importante destacar que, en función del plazo de la operación, el tipo de interés anual utilizado para su liquidación es distinto. Como se verá más adelante, la relación existente entre el nivel de los tipos de interés y el plazo al que van referidos va a depender de diferentes factores como las expectativas de los agentes económicos, primas por riesgo, por liquidez, …

Ejercicio 3. Cuando el Tesoro emite una Letra se está comprometiendo a pagar al suscriptor un importe de 1.000 euros en el plazo de un año[3] a cambio de recibir, en la fecha de emisión, un determinado importe que recibe la denominación de "efectivo" de la Letra, *E*. Para determinar la cuantía a pagar por el suscriptor, una vez establecido el tipo de interés de la operación,[4] se utiliza el régimen de capitalización simple y año comercial. Ahora bien, en este caso, y a diferencia del anterior, el problema a resolver es el de determinar cuál es el capital a entregar al inicio de la operación para que, junto con los intereses que genere, al final, la cuantía resultante sea igual a la cantidad que el Tesoro se ha comprometido a pagar al suscriptor (nominal de la Letra).

Así pues, la operación podemos representarla gráficamente como sigue:



El suscriptor de la Letra del Tesoro entrega una cuantía E en la fecha de suscripción ($t = 0$) a cambio de recibir al cabo de un año el nominal de la Letra (1.000 euros), que incluye el capital prestado al Tesoro (E) más los intereses que genere.

Dicha cuantía, E, debe verificar

$$E + E \cdot i \cdot n = N$$

$$E[1 + i \cdot n] = N$$

$$E = \frac{N}{(1+i\cdot n)}.$$

Así, si suponemos que el tipo de interés al que este inversor puede suscribir la Letra del Tesoro es del 2,938% anual y $n = 365$ días, entonces el efectivo de la Letra del Tesoro es

$$E = \frac{1.000}{\left(1 + 0,02938\,\frac{365}{360}\right)} = 971,07 \text{ euros.}$$

[3] Las Letras del Tesoro son activos emitidos al descuento y con un nominal de 1.000 euros. En la actualidad se emiten Letras del Tesoro a diferentes plazos: seis meses, un año y dieciocho meses.

[4] El tipo de interés de estas operaciones se determina, en el mercado primario, mediante subasta. Para una descripción del procedimiento de subasta y de los activos financieros emitidos por el Tesoro Público puede consultarse la página http://www.meh.es/tesoro.

1.3 Régimen de capitalización compuesta

Suponga una operación financiera por la cual un individuo deposita en una entidad financiera un capital de cuantía C_0 durante un periodo de dos años. Si dicha operación se liquidara bajo el régimen de capitalización simple, el interés que generaría sería

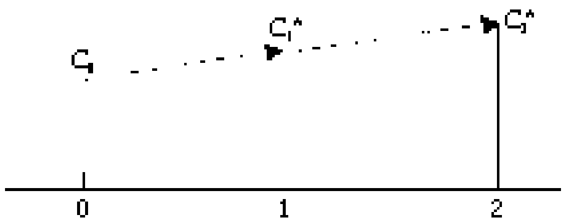
$$I = C_0 \cdot i \cdot 2,$$

y la cuantía acumulada en la cuenta de depósito al cabo de dos años sería

$$C_2 = C_0\,[1 + i \cdot 2],$$

siendo i el tipo de interés anual pactado.

Ahora bien, una posible alternativa a esta inversión sería proceder a cancelar el depósito una vez hubiese transcurrido un año, reinvirtiendo la cuantía resultante de la primera operación (C_0 más los intereses generados durante un año) en la misma o en otra entidad financiera. Esta operación puede representarse como sigue:



De esta forma, la cuantía resultante al cabo de un año sería

$$C_1^* = C_0\,[1 + i \cdot 1].$$

Si este capital es de nuevo reinvertido durante un año adicional al mismo tipo de interés anual i al cabo de dos años de iniciada la operación, la cuantía acumulada sería

$$C_2^* = C_1^*\,[1 + i \cdot 1] = C_0[1 + i][1 + i] = C_0\,[1 + 2 \cdot i] + C_0 i^2.$$

Comparando los resultados que se obtienen en estas dos operaciones financieras alternativas, podemos observar cómo la segunda alternativa genera una cuantía disponible al final de los dos años superior a la primera. En concreto, la diferencia es igual al término $C_0 \cdot i^2$, correspondiente a los intereses que durante el segundo año han generado los intereses que se liquidan al final del primer año.

Esta situación haría inevitable que los inversores procedieran a cancelar y reabrir sucesivamente el depósito, lo que generaría graves inconvenientes de carácter administrativo a la entidad depositaria, incluyendo el riesgo de perder a dicho cliente.

Una posible solución para evitar este tipo de situaciones, especialmente en inversiones a medio y largo plazo, es la aplicación del régimen de capitalización compuesta a la hora de proceder a la liquidación de los intereses. La idea fundamental de la capitalización compuesta es que los intereses generen, a su vez, intereses, situación que podemos describir como sigue.

Sea C_n la cuantía que recibiría un inversor al cabo de n años tras la segunda operación que acabamos de describir. Esa cuantía sería igual a la que tuviese disponible un año antes, C_{n-1}, más los intereses que durante ese año hubiese generado dicha operación, es decir,

$$C_n = C_{n-1} + C_{n-1} \cdot i \cdot 1 = C_{n-1}\,(1 + i). \qquad [4]$$

Como C_1 (cuantía que recibiría el inversor si al cabo de un año cerrase la cuenta) es igual a $C_0 + C_0 \cdot i$, es decir,

$$C_1 = C_0\,(1 + i),$$

la ecuación [4] implica que

$$C_n = C_0\,(1 + i)^n. \qquad [5]$$

Esta expresión es la que se utiliza para liquidar las operaciones financieras bajo el régimen de capitalización compuesta. La recompensa o *interés* que se recibiría por poner a disposición de un tercero un capital de C_0 u.m. durante un periodo de n años a un tipo de interés i sería

$$I = C_0[(1 + i)^n - 1]\ n \quad N. \qquad [6]$$

Esta forma de liquidar los intereses produciría el mismo resultado que la cancelación y reinversión periódica (anual) de la operación con el fin de que los intereses generasen a su vez intereses.

Ejercicio 4. Suponga que el tipo de interés al que una entidad financiera remunera una cuenta de depósito es del 4% anual bajo el régimen de capitalización compuesta. Obtenga la cuantía acumulada en dicha cuenta al cabo de seis años si se realiza un depósito inicial de 2.000 euros.

De acuerdo con la fórmula [5], la cuantía acumulada en dicha cuenta al cabo de seis años vendrá dada por

$$C_6 = C_0 \cdot (1 + i)^6 = 2.000\,(1 + 0{,}04)^6 = 2.530{,}64 \text{ euros.}$$

Al igual que el tipo de interés bajo el régimen de capitalización simple, i es una magnitud que depende de la unidad de tiempo con la que se esté trabajando. De esta forma, si se escoge una unidad de tiempo equivalente a $1/m$ años ($m \quad N$), el tipo de interés i^* expresado en la nueva unidad de tiempo equivalente a un tipo de interés anual i deberá verificar

$$I = C\left[(1+i^*)^{n^*} - 1\right] = C\left[(1+i)^n - 1\right],$$

siendo $n^* = n \cdot m$ el número de nuevas unidades de tiempo incluidas en n años.

Por tanto,

$$(1 + i^*)^{n \cdot m} = (1 + i)^n \qquad i^* = (1 + i)^{1/m} - 1.$$

De esta forma, y continuando con el ejercicio anterior, un tipo de interés anual del 4% bajo el régimen de capitalización compuesta es equivalente a un tipo de interés semestral $i^* = (1 + 0{,}04)^{1/2} - 1 = 0{,}019804$ o, equivalente, a un tipo de interés trimestral $i^{**} = (1 + 0{,}04)^{1/4} - 1 = 0{,}009853$.

Ejercicio 5. Suponga que el tipo de interés al que una entidad financiera remunera sus cuentas de depósito es, en estos momentos, el 4% anual, previéndose que dentro de dos años el tipo de interés se reduzca al 3% anual. Obtenga la cuantía acumulada en dicha cuenta al cabo de cinco años si se liquida bajo el régimen de capitalización compuesta a partir de una inversión inicial de 1.000 euros.

Según los datos de partida y denotando por i_1 al tipo de interés vigente durante los dos primeros años y por i_2 al tipo de interés vigente durante el periodo restante, la cuantía acumulada a los dos años será

$$C_2 = C_0\,(1 + i_1)^2$$

y tres años más tarde será

$$C_5 = C_2\,(1 + i_2)^3,$$

por lo que

$$C_5 = C_0(1 + i_1)^2\,(1 + i_2)^3 = 1.000 \cdot (1 + 0{,}04)^2\,(1 + 0{,}03)^3 = 1.181{,}89 \text{ euros.}$$

1.4 Comparación de los regímenes de capitalización simple y capitalización compuesta

Resulta conveniente comparar la cuantía acumulada y los intereses generados por una misma operación pactada bajo el régimen de capitalización compuesta con la cuantía acumulada si esa misma operación se hubiese pactado bajo el régimen de capitalización simple a un mismo tipo de interés anual i.

Gráficamente, la cuantía acumulada bajo ambos regímenes de capitalización aparece ilustrada en la figura 1.1. Ala vista de esta figura puede observarse cómo la reinversión de los intereses, implícita en el régimen de capitalización compuesta, tiene un importantísimo efecto en la cuantía acumulada a medio y largo plazo. Así, bajo el régimen de capitalización compuesta podemos ver cómo al cabo de veinticinco años y a un tipo de interés anual del 6% la cuantía acumulada es casi el doble de la que se habría obtenido bajo el régimen de capitalización simple.

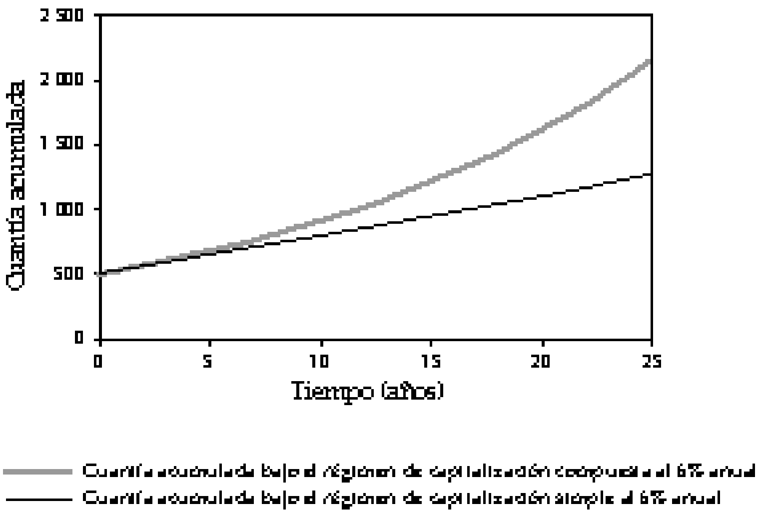


Figura 1.1. Capitalización simple frente a capitalización compuesta.

En cualquier caso, hay que señalar que, en el corto plazo, ambos regímenes producen resultados más o menos similares. Más aún, para valores de n entre cero y uno, los intereses generados mediante el régimen de capitalización simple son superiores a los que generaría la operación si se hubiese pactado bajo el régimen de capitalización compuesta coincidiendo para el plazo exacto de un año.

Otro aspecto relevante al comparar ambos regímenes de capitalización es la *fuerza* con que se van generando intereses periodo a periodo en relación con la cuantía acumulada al principio de cada periodo.

Cuadro 1.1
Capitalización simple frente a capitalización compuesta.

	Capitalización simple (6% anual)			Capitalización compuesta (6% anual)		
n (años)	C_n	ΔC_n	$\Delta C_n / C_n$	C_n	ΔC_n	$\Delta C_n / C_n$
0	500	—	—	500,00	—	—
1	530	30	0,0600	530,00	30,00	0,06
2	560	30	0,0566	561,80	31,80	0,06
3	590	30	0,0536	595,51	33,71	0,06
4	620	30	0,0508	631,24	35,73	0,06
5	650	30	0,0484	669,11	37,87	0,06
6	680	30	0,0462	709,26	40,15	0,06
7	710	30	0,0441	751,82	42,56	0,06
8	740	30	0,0423	796,92	45,11	0,06
9	770	30	0,0405	844,74	47,82	0,06
10	800	30	0,0390	895,42	50,64	0,06

Obsérvese cómo si una operación se liquida bajo el régimen de capitalización simple, el interés adicional que se obtiene por mantener la inversión un año más es siempre el mismo (30 euros). Ello hace que esa recompensa que se obtiene por mantener la inversión un año adicional vaya disminuyendo en términos relativos, es decir, la recompensa que se obtiene con relación a la cuantía acumulada y "reinvertida" un año adicional va decreciendo. Así, la recompensa obtenida durante el primer año fue efectivamente un 6% de la inversión inicial (500 euros). Sin embargo, durante el décimo año los intereses obtenidos (30 euros) con relación a la cuantía acumulada en la cuenta al final del noveno año (770 euros) genera solamente un 3,90% respecto de esta última cantidad.

Esta situación permite describir la capitalización simple como un régimen para liquidar operaciones financieras, en las que la fuerza generadora de intereses, es decir, la recompensa por disponer de capitales ajenos, va cayendo conforme prolongamos la operación.

Por el contrario, si la operación se liquida bajo el régimen de capitalización compuesta, la recompensa que se obtiene por prolongar la operación un año más es cada vez mayor (30 euros durante el primer año y 50,64 durante el décimo año). Sin embargo, en términos relativos, es decir, comparando los intereses generados de año en año con la cuantía acumulada al principio de cada año, la recompensa permanece constante en el 6%. Ello induce a pensar que, bajo el régimen de capitalización compuesta, la *fuerza* con que se van generando intereses, de año en año, permanece constante a lo largo del tiempo.

Como veremos más adelante, este concepto de *fuerza* o *intensidad* en la generación de intereses va a tener un papel clave en los fundamentos teóricos de la Matemática Financiera que estudiaremos en el siguiente capítulo.